NAŠ KRŠ, XI, 18–19 (1985)

DOLOČANJE DOLŽINE NEZNANIH JAMSKIH ROVOV S POMOČJO FRAKTALNE ANALIZE

France ŠUŠTERŠIČ, Inštitut za raziskovanje krasa, Postojna

V praksi se mnogokrat srečamo z nalogo, določiti resnično dolžino podzemskega vodotoka, poznamo pa samo razdaljo med ponorom in izvirom. Običajno jo množimo s t.i. koeficientom vijugavosti, da bi dobili vsaj prvi približek resničnemu stanju. Seveda pa je tudi vrednost koeficienta vijugavosti običajno neznana in si jo izposodimo s kakega bližnjega jamskega sistema in verjamemo, da ima pač bolj splošno vrednost. V primerih, da je znan vsaj del podzemske tokave, bi si lahko precej pomagali. Toda običajno se tako dobljene vrednosti koeficienta vijugavosti zelo razlikujejo od pričakovanih in se zato njegovi uporabi pravzaprav raje ogibamo. Te težave lahko obidemo in bistveno izboljšamo rezultate, če se poslužimo metodologije, ki nam jo nudi fraktalna analiza.

Fraktalna analiza je sorazmerno mlada matematična panoga, ki se ukvarja z merskimi lastnostmi nezveznih prirodnih linij, ploskev itd. Preden se poglobimo v osrednjo temo tega predavanja, je koristno, da pregledamo temeljne ugotovitve fraktalne analize, iz katerih izhajajo praktično uporabni zaključki. Ker intuitivno enačimo dolžino jame z dolžimo njene osi, torej črto, nas v nadaljnjem zanimajo samo fraktalne lastnosti črt.

Krivulje, ki jih srečemo v naravi, so le deloma končne. Takšne so npr. trajektorije, ki jih opisujejo kakršnikoli že delci ob svojem gibanju. Večina tistih, ki niso povezane z gibanjem, pa je končnih le na videz, ali pa jih za takšne smatramo le zaradi udobnosti. B.B. Mandelbrot (1977, 32) navaja kot primer takšne črte (v nadaljnjem fraktala) obalno linijo. Če jo merimo z n. pr. kilometrsko „palico" (tetivo), dobimo krajšo dolžino neke obale med dvema točkama, kot če bi jo merili z npr. stometrsko tetivo. Če tetivo krajšamo, dobivamo vse večje dolžine, pač zato, ker zaobjemamo vse več vijug. Ko se tetiva skrajša na velikost molekularnih dimenzij, se zamisel „obalne linije" razblini, sam moramo meriti med molekulami in dolžina teži k neskončnosti.

To vodi do zamisli, da bi vzeli logaritem tetive (log t) za absciso, logaritem izmerjene dolžine (log ℓ) pa za ordinato. Izkaže se, da tako določene točke ležijo na premici, ki jo po odkritelju, L.F. Richardsonu (1961 cit. B.B. Mandelbrot, o.c.), iemujemo „Richardsonovo premico". Smerni koeficient Richardsonove premice je merilo za vijugavost (fraktalnost; od frango, lat. = zlomim) preučevane črte. Če je vijugavost neodvisna od velikostnega reda

in velja načelo samopodobnosti, Richardsonova premica ni le regresijski približek resničnemu stanju, temveč postane interpolacijska. Izraz (1 – k = D) ima vse lastnosti dimenzije in se imenuje Haussdorf-Besikovičeva (fraktalna) dimenzija. Fraktalna dimenuija črt je razen v primeru premic, večja od topološke dimenzije. Čim bolj je črta zvijugana, tem večja je njena fraktalna dimenzija, ki zavzame vrednost dva, ko krivulja povsem prekrije neko ploskev.

Os jame sicer enačimo s trajektorijo, namreč poprečno potjo vodnih delcev, ki so jamo izdelali. Ne moremo pa je tako dejansko določiti, saj se stene in strop bolj ali manj podirajo in tako stalno motijo vodni tok, tudi če bi v povsem zalitih kanalih fizično bili spsobni določiti poprečno trajektorijo. Dejansko lahko os aproksimiramo le s pomočjo sten. Ker pa te so fraktalne ploskve, je tudi jamska os fraktal. To še toliko bolj, ker jamske vijuge ne zavise toliko od hidravličnih razmer, kot npr. pri površinskih rekah, kot od geostrukturnih predispozicij, ki imajo zopet lastnosti fraktalov. Torej ima tudi poprečna trajektorija lastnosti fraktala, do tiste velikostne meje, ko je za njen potek merodajnejša oblikovitost sten, hidravlične razmere znotraj toka pa zanemarljive. Praksa je pokazala, da je pri slovenskih jamah spodnja meja nekje med 10 m in 15 m. Če torej meri tetiva (t) več kot 15 m, ima tudi os rova lastnosti fraktalov.

Če označimo pri dani tetivi (t) dobljeno dolžino z (ℓ), zapišemo enačbo Richardsonove premice:

$$\log \ell = k \log t + n$$

Iz merskih podatkov dobimo oba koeficienta Richardsonove premice z enačbo:

$$\begin{Vmatrix} N & \Sigma \log t \\ \Sigma \log t & \Sigma (\log t)^2 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} k \\ n \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} \Sigma \log \ell \\ \Sigma \log \ell \log t \end{Vmatrix} \quad (1)$$

Če je N število meritev.

Najdaljša tetiva, ki jo lahko izmerimo nad vodotokom v neki jami, je razdalja med pritočnim in odtočnim sifonom. V tem primeru je njena dolžina tudi enaka približku dolžine jamske osi, torej $t_o = \ell_o$. Popolnoma isto velja tudi za vsak pretočni kraški sistem, le da na njem merimo lahko samo najdaljšo tetivo, med ponorom in izvirom, velja pa relacija T = L (Slika). Če predpostavimo, da so fraktalne lastnosti znanega in neznanega dela podzemske tokave enake, lahko izračunamo Richardsonovo premico za celoten sistem, saj je smetni koeficient (k) ves čas enak, Richardsonova premica celotnega sistema pa poteka skozi točko (log T, log L).

Splošna enačba premice skozi znano točko in z znanim smernim koeficientom se glasi:

$$y - y_o = k (x - x_o), \quad (2)$$

oz. po preureditvi

$$y = k x - k x_o + y_o . \quad (3)$$

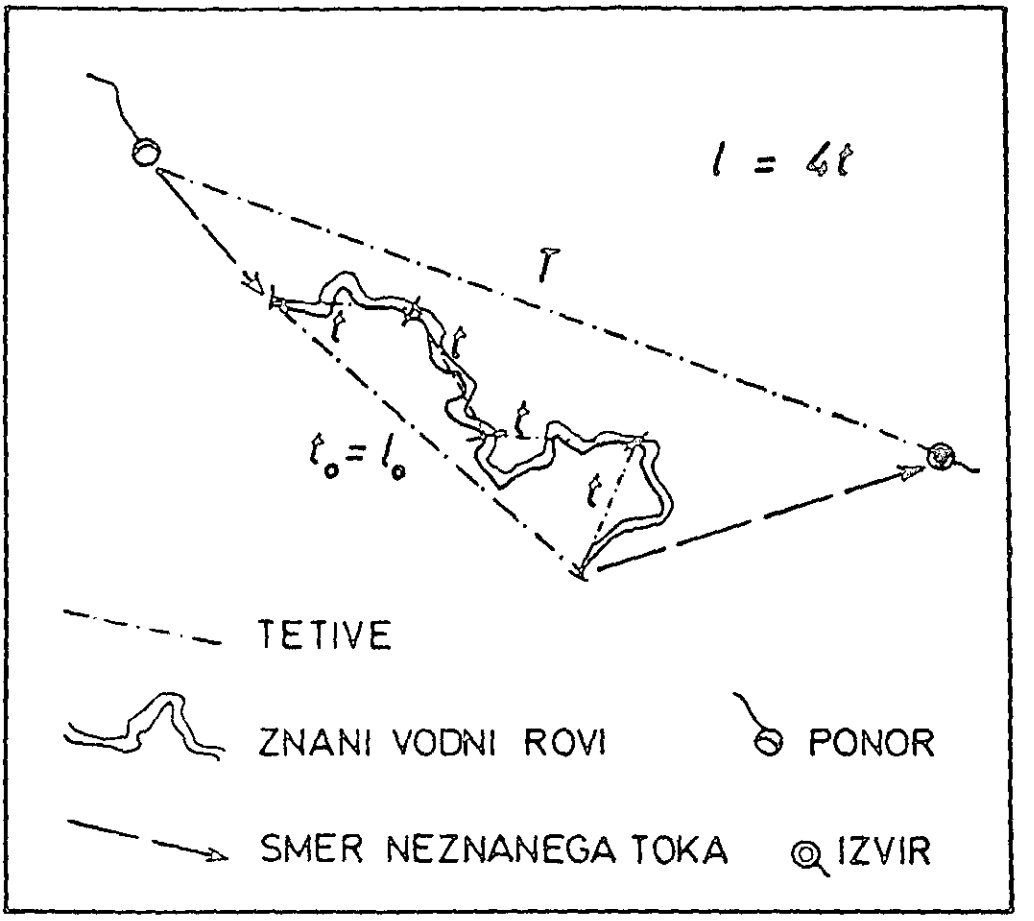
Za naše razmere velja:

$$\log L = k (\log t) - k (\log T) + \log T. \quad (4)$$

Označimo z m dolžino tetive (velikostni modul), pri katerem želimo izračunati dolžino neznanega podzemskega toka! Tedaj sledi po antilogaritmiranju:

$$L_m = \frac{m^k T}{T^k} = m^k T^{(1-k)} = m^k T^D. \quad (5)$$

Oglejmo si postopek za jamo Dimnice med Trstom in Rijeko! V jami, ki je skupaj dolga prek 5 km, naletimo tudi na sklenjen vodni tok, ki odvaja vodo s Slivarskih ponikev v Rižano. Zračne rezdalje med ponorom in izvirom je 13.140 m (Po topografski karti merila 1 : 25000). Če definiramo



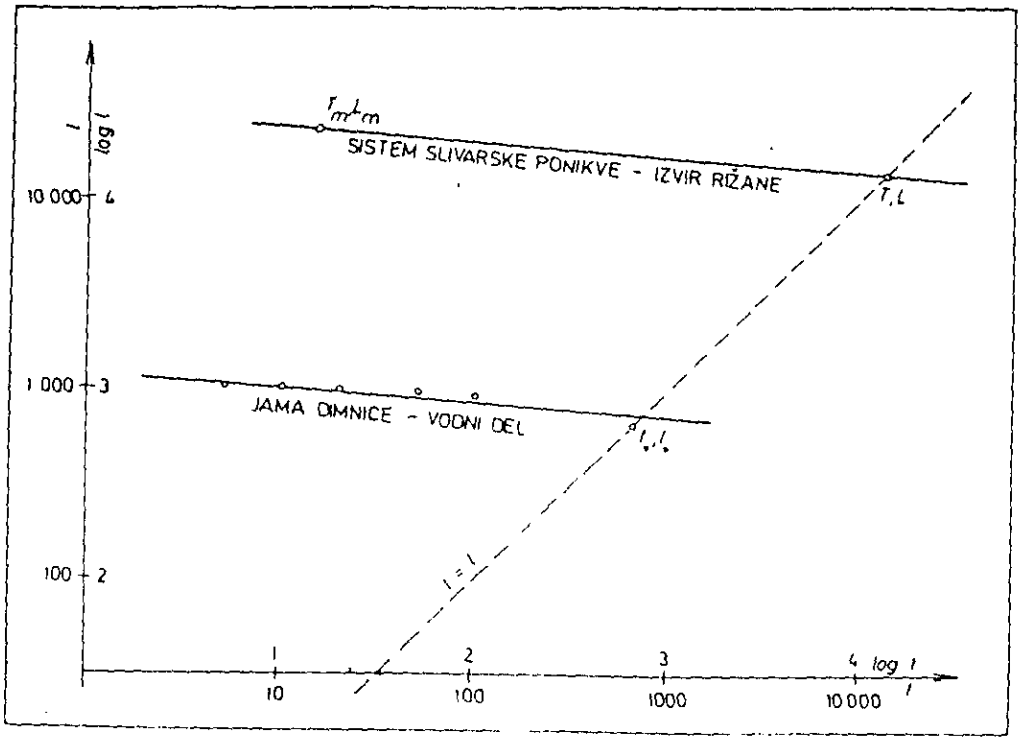
os jame po postopku, ki sem ga opisal že pred leti (F. Šušteršič, 1980), lahko na tej osi izmerimo sledeče količine (izmerjene dolžine so merjene od obeh strani):

Richardsonovo premico določajo parametri:

$k = -0{,}08006 \quad n = 3{,}09464$

$(r = -0{,}89148)$,

t		ℓ	log t	log ℓ	
5 m	1087 m	1055 m	0,699	3,036	3,023
10 m	993 m	999 m	1,000	2,997	3,000
20 m	967 m	979 m	1,301	2,985	2,991
50 m	971 m	958 m	1,699	2,987	2,981
100 m	905 m	935 m	2,000	2,957	2,971
653 m = t_o	= ℓ_o =	653 m	2,815	2,815	



fraktalna dimenzija pa je D = 1,08006.

Če si izberemo za modul tetivo dolgo 15 m, kar je sicer spodnja meja fraktalnosti, sledi iz enačbe (5).

$$L_{15} = 15^{-0,08006}\ 13140^{1,08006} = 22603\text{m}$$

Celotna dolžina (pretežno) neznanih vodnih kanalov med ponorom in izvirom znaša približno 22,6 km.

Oglejmo si sedaj, kakšna je soodvisnost fraktalne dimenzije in koeficienta vijugavosti, K_n (glej definicijo pri V.N. Dubljanski, 1980, 80). V oznakah, ki smo jih že uvedli, sledi iz definicije:

$$K_n = \frac{L}{T} \approx \frac{\ell m}{t_o} \qquad (6)$$

Odtod:

$$\ell m = K_n t_o = K_n \varphi_o \text{ oz.} \qquad (7)$$

$$\log \ell_m = \log K_n + \log \ell_o \qquad (8)$$

Z m označimo ličljivost digitizerja oz. odprtino pikirnega šestila, s katerim smo merili „dolžino rovov". Smerni koeficient Richardsonove premice dobimo iz splošnega obrazca za izračun smernega koeficienta pri dveh znanih točkah:

$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{\log \ell o - \log \ell m}{\log t_o - \log m}$$

Vstavimo v imenovale cizraz na desni strani enačbe (8):

$$k = \frac{\log t_o - \log K_n - \log t_o}{\log t_o - \log m} = \frac{-\log K_n}{\log t_o - \log_m} \qquad (9)$$

pri čemer smo upoštevali, da je $\ell_o = t_o$. Od tod sledi:

$$\log K_n = k\ (\log m - \log t_o),\ \text{oz.} \qquad (10)$$

$$K_n = \left(\frac{m}{t_o}\right)^k = \left(\frac{m}{t_o}\right)^{1-D} \qquad (11)$$

Koeficient vijugavosti je torej eksponentna funkcija fraktalne dimenzije in zato zelo nestabilen. Poleg tega zavisi njegova vrednost tudi od modula, s katerim smo določili „dolžino" osi jame in od zračne razdalje med dotočnim in iztočnim mestom. Statistično nestabilnost koeficienta vijugavosti je ugotovil že Ph. Renault (1972), vendar je ni pravilno razložil, čeprav je dejansko zadel pravo pot k Richardsonovi premici.

Iz enačbe (11) lahko izrazimo k kot funkcijo K_n :

$$k = \frac{\log K_n}{\log m - \log t_o} \qquad (12)$$

Če se vrnemo nazaj k enačbi (5), s katero ugotavljamo dolžino neznanega vodnega toka:

$$L_m = m^k\ T^{(1-k)} \qquad (5)$$

in skušamo vstaviti vanjo izraz na desni strani enačbe (12), ugotovimo, da parametar K_n v njej ne nastopa kot koeficient (tega praviloma povezujemo z množenjem), temveč kot zapleten logaritmično-eksponentni operator. Zato je tudi termin „koeficient vijugavosti" za razmerje $\varphi_m : t_o$ nesprejemljiv. Če ta parametar že moramo uporabiti, so dosti sprejemljivejši neopredeljeni izrazi, ki sta jih upprabljala A. Šerko (1946, 135) in F. Jenko (1959, 50).

F. Jenko (o.c.) navaja približno vrednost $K_n = 1{,}5$. Vemo tudi, da znaša pri slovenskih jamah, za katere ga je ugotavljal, zračna razdalja med pritočnim in odtočnim mestom okrog 2 km. Končno smo izračunali, da znaša smerni koeficient Rechardsonove premice za vodni del Dimnic $k = -0{,}08006$. Ker so vodni rovi Dimnic v primerjavi z ostalimi slovenskimi vodnimi jamami sorazmerno ravni, je verjetno, da znaša bolj splošna vrednost okrog $k = -0{,}1$. Iz teh podatkov skušajmo izračunati, s kakšnim modulom je Jenko (o.c.) meril dolžine rovov.

Iz enačbe (11) sledi:

$$m = t_o K_n^{1/k} \quad \text{zato:} \qquad (13)$$

$$m = 2000\ \text{m}\ 1{,}5^{-1/0{,}1} = 34{,}68\ \text{m} \approx 35\ \text{m}$$

S precejšno verjetnostjo lahko torej zaključimo, da je samo seštel stranice poligonov in je drobno vijuganje, v razponu pod 35 m in nad 15 m zanemaril.

LITERATURA

Arhiv IZRK ZRC SAZU, Postojna.

BRONŠTEJN, J.N., SEMENĐAJEV, K.A., 1963: Matematični priročnik, Založba Življenje in tehnika, 1–699, Ljubljana.

DUBLJANSKI, V.N., ILJUHIN, V.V., LOBANOV, J.E., 1980: Nekateri problemi morfometrije kraških votlin. Naše jame, 21 (1979), 75–84.

JENKO, F., 1959: Hidrogeologija in vodno gospodarstvo krasa. Samozaložba, 1–237, Koper.

MANDELBROT, B.B., 1977: Fractals, form, chance, and dimension. W.H. Freeman and Company, 1–361, San Francisco.

RENAULT, Ph., 1972: La morphometrie speleologique. Spelunca, 4° serie, 12^{e} annee, 2, 51–57.

ŠERKO, A., 1946: Barvanje ponikalnic v Sloveniji. Geografski vestnik, 18, 1–4.

ŠUŠTERŠIČ, F., 1980: Dimenzioniranje kraških votlin. Naše jame, 21 (1979), 61–73.